

線形計画法

例題 1 (生産計画)

ある企業では製品 A,B,C を原料 I, II, III, IV用いて生産している。

製品 A,B,C の 1 単位当たり利益をそれぞれ 80,110,95 とする。

また、製品 A,B,C を 1 単位生産するのに必要な原料 I, II, III, IVの
それぞれ量と使用可能な上限が次の表で与えられる。

表 1

製品名 原料	A	B	C	使用できる 上限
I	4	0	7	90
II	1	3	9	60
III	6	0	14	110
IV	4	10	1	75

これらの条件のもとに,利益を最大にするには製品 A,B,C をそれぞれ,
どれだけ生産すれば良いか。

解 法

製品 A,B,C をそれぞれ x_1, x_2, x_3 単位生産するとき, x_1, x_2, x_3 は以下の不等式を満たす.

$$\begin{aligned}4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &\leq 90 \\1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &\leq 60 \\6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 &\leq 110 \\4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &\leq 75\end{aligned}$$

さらに各製品生産量は負ではないから

$$0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$$

この制約条件のもとに

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

を最大化する.

Microsoft Excel のソルバー を用いる.

● ソルバーの導入

Excel の メニュー「データ」に「分析」「ソルバー」がある場合は以下の手続きは不要.である. そのまま 2) ソルバーによる解法の例を実行する.

Excel の メニュー「データ」に「分析」「ソルバー」がない場合

ファイル > オプション > アドイン の順に選択

アドインの表示窓 アクティブでないアプリケーションに

Excel ソルバー があることを確認

画面下の管理(A)と表示される小さい窓のドロップダウンリスト

▼で Excel アドインを選択後, 設定(G)をクリック

有効なアドインが小窓で表示される. その中のソルバーアドインを選択しチェックを入れ[OK]をクリックする.

ソルバーによる解法の例

- Excel に下記の作成例のように表 1 のデータを作成する.

作成例

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2		0	0	0		
3	I	4	0	7	0	90
4	II	1	3	9	0	60
5	III	6	0	14	0	110
6	IV	4	10	1	0	75
7	L	80	110	95	0	
8						

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2		0	0	0		
3	I	4	0	0	0	90
4	II				0	60
5	III				0	110
6	IV				0	75
7	L	80	110	95	0	
8						

Callout boxes in the image show the following formulas:

- For cell E3: $=\text{sumproduct}(B3:D3, B\$2:D\$2)$
- For cell E4: $=\text{sumproduct}(B4:D4, B\$2:D\$2)$
- For cell E5: $=\text{sumproduct}(B5:D5, B\$2:D\$2)$
- For cell E6: $=\text{sumproduct}(B6:D6, B\$2:D\$2)$
- For cell E7: $=\text{sumproduct}(B7:D7, B\$2:D\$2)$
 $B7 \cdot B2 + C7 \cdot C2 + D7 \cdot D2$
 $80 \cdot x1 + 110 \cdot x2 + 95 \cdot x3$

この作成例では

(1) セル B2,C2,D2 が 製品 A,B,C のそれぞれの生産量 x_1, x_2, x_3 を表す.

(2) 線形の一次式

$$\begin{aligned}
 &4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \\
 &1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \\
 &6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 \\
 &4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3
 \end{aligned}$$

を E3, E4, E5, E6 に入力している.

ここで, $\text{sumproduct}(B4:D4, B\$2:D\$2)$ はベクトル $(B4, C4, D4)$ と $(B2, C2, D2)$ の内積 $B4 \cdot B2 + C4 \cdot C2 + D4 \cdot D2$ であり $4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$ を表す.

(3) F3, F4, F5, F6 には, 原材料 I, II, III, IV の使用できる量の上限を入力している.

(4) E7 には

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

を表す式を入力している.

● 表のデータを入力後,

(5) メニュー 「データ」, 「分析」, 「ソルバー」の順にクリックしてソルバーのパラメータ入力用の窓を開く.

(6) 目的の設定という欄にセル E7 を指定する

(7) 目標値には「最大値」を選択し, チェックを入れる.

(8) 変数セルの変更欄には x_1, x_2, x_3 を表すセル B2 から D2 をドラックして指定する.

(9) 制約条件の対象の欄には

この例題の制約条件式

$$\begin{aligned}4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &\leq 90 \\1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &\leq 60 \\6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 &\leq 110 \\4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &\leq 75\end{aligned}$$

を表す式を入力する.

このためには,入力窓の「追加」をクリックし制約条件の追加入力用の窓を表示させ,

例えば

$$4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 90$$

を表す式を入力するのであれば

セルの参照欄に $4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$ を表すセル E3 を指定

$\leq, =, \geq$ などのドロップダウンリストで \leq を選択し,制約条件の欄には上限値の 90 を入力する. 入力後さらに「追加」をクリックし他の 3 つの制約条件式も同様に入力する.

(10) さらに, 制約条件式 $0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$ を指定するため

「制約のない変数を非負数にする」 にチェックを入れる.

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

\$E\$7

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80x_1 + 110x_2 + 95x_3$$

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V)

0

変数セルの変更:

\$B\$2:\$D\$2

x_1, x_2, x_3

制約条件の対象:(U)

\$E\$3 <= \$F\$3
\$E\$4 <= \$F\$4
\$E\$5 <= \$F\$5
\$E\$6 <= \$F\$6

$$4x_1 + 0x_2 + 7x_3 \leq 90$$

$$1x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 60$$

$$6x_1 + 0x_2 + 14x_3 \leq 110$$

$$4x_1 + 10x_2 + 1x_3 \leq 75$$

追加(A)

変更(C)

削除(D)

すべてリセット(R)

読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

$$0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$$

解決方法の選択:
(E)

シンプレックス LP

オプション(P)

解決方法

滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H)

解決(S)

閉じる(O)

(11) 最後に「解決」をクリックすると以下の結果が出力される。

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2		7.8545455	3.9090909	4.4909091		
3	I	4	0	7	62.854545	90
4	II				60	60
5	III				110	110
6	IV				75	75
7	L				1485	
8						
9						
10						
11						
12						
13						

ソルバーの結果

ソルバーによって解が見つかりました。すべての制約条件と最適化条件を満たしています。

ソルバーの解の保持
 計算前の値に戻す

ソルバー パラメーターのダイアログに戻る
 アウトライン レポート

レポート
 解答
 感度
 条件

ソルバーによって解が見つかりました。すべての制約条件と最適化条件を満たしています。
 GRG エンジンが使用されるのは、ソルバーで 1 つ以上のローカル最適解が見つかった場合です。シンプレックス LP が使用されるのは、ソルバーでグローバル最適解が見つかった場合です。

$$x_1 = 7.8, x_2 = 3.9, x_3 = 4.5$$

のときに

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

が最大値 1485 をもつことを表す.制約条件は満たされている.

例題 2 (輸送問題)

製品を 2 つの工場 A1,A2 で製造し 3 社 B1,B2,B3 に納入している企業がある。これら 3 社からの注文は表 2-1 の通りである。この注文に応じるため表 2-2 のように工場 A1,A2 で製品を製造する。製造した製品を工場 A1,A2 からそれぞれ B1,B2,B3 に輸送する際の 1 単位当たりのコストは表 2-3 の通りである。3 社 B1,B2,B3 からの注文を充足し、かつ、輸送コストを最小にするには、工場 A1,A2 から 3 社 B1,B2,B3 への輸送数をどのように配分すれば良いか。

表 2-1(注文数)

B1	65
B2	45
B3	50

表 2-2(製造数)

A1	70
A2	90

表 2-3(輸送コスト)

	B1	B2	B3
A1	5	7	11
A2	10	6	3

解 法

工場 A_i から注文先 B_j への製品の輸送量を $x_{i,j}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) で表すと, 表 2-1 から工場 A_1, A_2 から注文先 B_1, B_2, B_3 への輸送について制約条件式

$$x_{1,1} + x_{2,1} = 65$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} = 45$$

$$x_{1,3} + x_{2,3} = 50$$

を満たす.

また, 表 2-2 から工場 A_1, A_2 の製造量について制約条件式

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 70$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 90$$

を満たす.

さらに製造量は非負であるから

$$0 \leq x_{i,j} \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

これらの制約条件の下で輸送コストの総和

$$5x_{1,1} + 7x_{1,2} + 11x_{1,3} + 10x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3}$$

の最小値を求める. 例題 1 と同様に Microsoft Excel のソルバーを用いる. 作成したデータは以下の通りである.

表 2-3(輸送コスト)

	B1	B2	B3
A1	5	7	11
A2	10	6	3

	A	B	C				
1		単位当たり輸送コスト					
2		B1	B2	B3			
3	A1		5	7	11		
4	A2		10	6	3		
5							
6		輸送配分					
7		B1	B2	B3			
8	A1		0	0	0	0	70
9	A2		0	0	0	0	90
10			0	0	0		
11	制約		65	45	50		
12							
13		輸送コスト					
14			0				

=SUM(B8:D8) $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}$

=SUM(B9:D9) $x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3}$

制約

表 2-1(注文数)

B1	65
B2	45
B3	50

=SUM(B8:B9) $x_{1,1} + x_{2,1}$

=SUM(C8:C9) $x_{1,2} + x_{2,2}$

=SUM(D8:D9) $x_{1,3} + x_{2,3}$

表 2-2(製造数)

A1	70
A2	90

=SUMPRODUCT(B3:D3,B8:D8)+ SUMPRODUCT(B4:D4,B9:D9)

$5x_{1,1} + 7x_{1,2} + 11x_{1,3} + 10x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3}$

ソルバーのパラメータ 入力は以下の通りである。

B14: SUMPRODUCT(B3:D3,B8:D8)+ SUMPRODUCT(B4:D4,B9:D9)
 $5x_{1,1} + 7x_{1,2} + 11x_{1,3} + 10x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3}$

目的セルの設定:(I)

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V)

変数セルの変更:(B) $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}$

制約条件の対象:(U)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決法の選択:

解決
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形
レック
滑らかではない非線形を示すソルバー
ださい

$x_{1,1} + x_{2,1} = 65$
 $x_{1,2} + x_{2,2} = 45$
 $x_{1,3} + x_{2,3} = 50$
 $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 70$
 $x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 90$

$0 \leq x_{i,j} \quad i = 1,2; j = 1,2,3$

ソルバーによる結果は以下の通りである。

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		単位当たり輸送コスト						
2		B1	B2	B3				
3	A1	5	7	11				
4	A2	10	6	3				
5								
6		輸送配分						
7		B1	B2	B3				
8	A1	65	5	0				
9	A2	0	40	50				
10		65	45	50				
11	制約	65	45	50				
12								
13		輸送コスト						
14		750						
15								
16								

The Solver Results dialog box shows the following information:

- Solver Parameters: Objective Cell: \$B\$14, To: Of Min Value Of: 750
- Constraint Summary: Constraint: \$B\$11:\$D\$11 <= \$E\$11:\$G\$11, Status: Solved Without a Constraint Violation
- Report Summary: Objective Cell: \$B\$14, Variable Cells: \$B\$3:\$D\$3:\$B\$9:\$D\$9, Objective Value: 750, Solver Method: GRG Nonlinear engine, Solver Options: Make Unconstrained Variables Non-Negative, Select a Solving Method: GRG Nonlinear engine, Solver Help: Solver's Help

$$x_{1,1} = 65, x_{1,2} = 5, x_{1,3} = 0, x_{2,1} = 0, x_{2,2} = 40, x_{2,3} = 50$$

のとき輸送コストの総和

$$5x_{1,1} + 7x_{1,2} + 11x_{1,3} + 10x_{2,1} + 6x_{2,2} + 3x_{2,3}$$

が最小値 750 になることを示している。表 2-1, 表 2-2 の制約条件を

満たしている。

