

(整数計画)

ある企業では製品 A,B,C を原料 I, II, III, IV用いて生産している.

製品 A,B,C の 1 単位当たり利益をそれぞれ 80,110,95 とする.

また, 製品 A,B,C を 1 単位生産するのに必要な原料 I, II, III, IVの
それぞれ量と使用可能な上限が次の表で与えられる.

表 4

製品名 原料	A	B	C	使用できる 上限
I	4	0	7	90
II	1	3	9	60
III	6	0	14	110
IV	4	10	1	75

これらの条件のもとに,利益を最大にするには製品 A,B,C をそれぞれ,どれだけ生産すれば良いか.ただし,生産個数は整数値でなければならない.

解 法

製品 A,B,C をそれぞれ x_1, x_2, x_3 単位生産するとき, x_1, x_2, x_3 は以下の不等式を満たす.

$$4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 90$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \leq 60$$

$$6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 \leq 110$$

$$4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \leq 75$$

さらに各製品生産量は負ではないから

$$0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$$

この制約条件のもとに

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

を最大化する.

Microsoft Excel のソルバー を用いる.

ソルバーによる解法の例

- Excel に下記の作成例のように表 4 のデータを作成する.

作成例

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2		0	0	0		
3	I	4	0	7	0	90
4	II	1	3	9	0	60
5	III	6	0	14	0	110
6	IV	4	10	1	0	75
7	L	80	110	95	0	
8						

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2			0			
3	I		4		0	90
4	II				0	60
5	III				0	110
6	IV				0	75
7	L	80	110	95	0	
8						

Callout boxes in the image show the following formulas:

- For cell E3: $=\text{sumproduct}(B3:D3, B\$2:D\$2)$
- For cell E4: $=\text{sumproduct}(B4:D4, B\$2:D\$2)$
- For cell E5: $=\text{sumproduct}(B5:D5, B\$2:D\$2)$
- For cell E6: $=\text{sumproduct}(B6:D6, B\$2:D\$2)$
- For cell E7: $=\text{sumproduct}(B7:D7, B\$2:D\$2)$
 $B7 \cdot B2 + C7 \cdot C2 + D7 \cdot D2$
 $80 \cdot x1 + 110 \cdot x2 + 95 \cdot x3$

この作成例では

- (1) セル B2,C2,D2 が 製品 A,B,C のそれぞれの生産量 x_1, x_2, x_3 を表す.
- (2) 線形の一次式

$$\begin{aligned}
 &4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \\
 &1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \\
 &6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 \\
 &4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3
 \end{aligned}$$

を E3, E4, E5, E6 に入力している.

ここで, $\text{sumproduct}(B4:D4, B\$2:D\$2)$ はベクトル (B4,C4,D4) と (B2,C2,D2) の

内積 $B4 \cdot B2 + C4 \cdot C2 + D4 \cdot D2$ であり $4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$ を表す.

(3) F3, F4, F5, F6 には, 原材料 I, II, III, IV の使用できる量の上限を入力している.

(4) E7 には

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

を表す式を入力している.

● 表のデータを入力後,

(5) メニュー 「データ」, 「分析」, 「ソルバー」の順にクリックしてソルバーのパラメータ入力用の窓を開く.

(6) 目的の設定という欄にセル E7 を指定する

(7) 目標値には「最大値」を選択し, チェックを入れる.

(8) 変数セルの変更欄には x_1, x_2, x_3 を表すセル B2 から D2 をドラックして指定する.

(9) 制約条件の対象の欄には

この例題の制約

x_1, x_2, x_3 が何れも整数という条件と

条件式

$$\begin{aligned}4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &\leq 90 \\1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &\leq 60 \\6 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 &\leq 110 \\4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &\leq 75\end{aligned}$$

を表す式を入力する.

このためには,入力窓の「追加」をクリックし制約条件の追加入力用の窓を表示させ,

セル B2 から D2 をドラックして指定する。ドロップダウンリストで int を指定する

次に $4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 90$

を表す式を入力する.

セルの参照欄に $4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$ を表すセル E3 を指定

$\leq, =, \geq$ などのドロップダウンリストで \leq を選択し,制約条件の欄には上限値の 90 を入力する. 入力後さらに「追加」をクリックし他の 3 つの制約条件式も同様に入力する.

(10) さらに、制約条件式 $0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$ を指定するため

「制約のない変数を非負数にする」 にチェックを入れる。

ソルバーのパラメーター

The screenshot shows the Solver Parameters dialog box with the following settings and annotations:

- 目的セルの設定:(I)**: $\$E\7 . Annotation: $L(x_1, x_2, x_3) = 80x_1 + 110x_2 + 95x_3$
- 目標値:** 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V). Value: 0
- 変数セルの変更:(B)**: $\$B\$2:\$D\2 . Annotations: x_1, x_2, x_3 and x_1, x_2, x_3 は整数という制約
- 制約条件の対象:(U)**:
 - $\$B\$2:\$D\$2 =$ 整数
 - $\$E\$3 \leq \$F\3 → $4x_1 + 0x_2 + 7x_3 \leq 90$
 - $\$E\$4 \leq \$F\4 → $1x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 60$
 - $\$E\$5 \leq \$F\5 → $6x_1 + 0x_2 + 14x_3 \leq 110$
 - $\$E\$6 \leq \$F\6 → $4x_1 + 10x_2 + 1x_3 \leq 75$
- 制約のない変数を非負数にする(K). Annotation: $0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$
- 解決方法のソルバー:** シンプлекс LP (E). Annotation: $0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$
- 解決方法:** 滑らかな非線形 $0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3$. Annotation: 示すソルバー問題には LP シンプлекс エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題には LP 演算エンジンを選択してください。

Buttons at the bottom: ヘルプ(H), 解決(S), 閉じる(O)

(11) 最後に「解決」をクリックすると以下の結果が出力される。

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3		MAX
2		16	1	1		
3	I	4	0	7	71	90
4	II	1	3	9	28	60
5	III	6	0	14	110	110
6	IV	4	10	1	75	75
7	L	80	110	95	1485	
8						
9						
10						
11						

$$x_1 = 16, x_2 = 1, x_3 = 1$$

のときに

$$L(x_1, x_2, x_3) = 80 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 95 \cdot x_3$$

が最大値 1485 をもつことを表す.制約条件は満たされている.